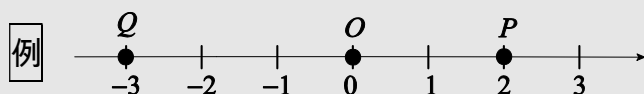


1 數

1-1 絕對值與相反數

重點整理 絕對值的定義與性質

1. 數線上，代表數 a 的點與原點的距離，稱為 a 的絕對值，以符號 $|a|$ 表示，且 $|a| \geq 0$ 。



P 點與原點的距離為 2，即 $|2| = 2$

Q 點與原點的距離為 3，即 $|-3| = 3$

2. 若 a 為任意實數，則 $|a| = \begin{cases} a & \text{當 } a > 0 \\ 0 & \text{當 } a = 0 \\ -a & \text{當 } a < 0 \end{cases}$

例 $|5| = 5$ ， $|0| = 0$ ， $|-8| = -(-8) = 8$

3. 任意二數相減的絕對值為大數減去小數的差，即

若 $a \geq b$ ，則 $|a - b| = a - b$ ；若 $a < b$ ，則 $|a - b| = -(a - b) = b - a$ 。

例 $|21 - 4| = 21 - 4 = 17$ ， $|8 - 13| = 13 - 8 = 5$

1 範例

練習

試分別寫出 $-\frac{1}{3}$ ，3.9，-5 的絕對值。

《解》 $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$
 $|3.9| = 3.9$
 $|-5| = 5$

試分別寫出 -5.4， $\frac{7}{2}$ ，-9 的絕對值。

《解》

2

範 例

練習

求下列各式的值：

(1) $|3-4|$

(2) $|15-9.3|$

(3) $|11.7-34.2|$

《解》 (1) $|3-4| = 4-3 = 1$

(2) $|15-9.3| = 15-9.3 = 5.7$

(3) $|11.7-34.2| = 34.2-11.7 = 22.5$

求下列各式的值：

(1) $|10-27|$

(2) $|32-15.6|$

(3) $|14.9-45.3|$

《解》

3

範 例

練習

求下列各式的值：

(1) $|5-8|+|4-6|-|10-7|$

(2) $|11-4|-|5+1|+|4-9|$

《解》 (1) $|5-8|+|4-6|-|10-7|$
 $= 3+2-3 = 2$

(2) $|11-4|-|5+1|+|4-9|$
 $= 7-6+5 = 6$

求下列各式的值：

(1) $|30-33|+|7-11|-|12-9|$

(2) $|22-8|-|9+3|+|3-7|$

《解》

4

範例

練習

(1) 哪些數的絕對值為3？

(2) 哪些整數的絕對值小於3？

《解》 (1) 3 或 -3

(2) -2, -1, 0, 1, 2

(1) 哪些數的絕對值為6？

(2) 哪些整數的絕對值小於6？

《解》

重點整理

相反數的定義

1. 數線上，位於原點兩側，且與原點距離相等的兩點所代表的數互為相反數。

例 -4 和 4 互為相反數

2. 任意數都有相反數，而0的相反數為0。

3. 若 a 、 b 兩數互為相反數，則 $|a| = |b|$ 且 $a + b = 0$ 。

例 $9 + (-9) = 0$ ，則9和-9互為相反數

5

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $|-4.8|$ 的相反數

(2) $-|7-11|$ 的相反數

(3) 已知 $x+1$ 與13互為相反數，求 $x = ?$

《解》 (1) $|-4.8| = 4.8$ 的相反數為 -4.8

(2) $-|7-11| = -(11-7) = -4$ 的相反數
為 4

(3) $\because x+1$ 與13互為相反數

$\therefore x+1+13=0 \Rightarrow x=-14$

求下列各式的值：

(1) $|6-23|$ 的相反數

(2) $-|(-10)|$ 的相反數

(3) 已知 -15 與 $x-4$ 互為相反數，求 $x = ?$

《解》

1-2

整數的四則運算

重點整理 整數的加法運算

1. 同號數相加：

(1) 正數 + 正數：結果為正數。

例 $5 + 7 = 12$

(2) 負數 + 負數：結果為負數。

例 $(-5) + (-7) = -(5 + 7) = -12$

2. 異號數相加：

正數 + 負數或負數 + 正數：結果可能為正數、0 或負數。

例 $(-5) + 7 = 7 - 5 = 2$

$$5 + (-7) = -(7 - 5) = -2$$

3. 任意數 + 0：結果為原來的數。

例 $5 + 0 = 5$ ， $-7 + 0 = -7$

1

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $(-25) + (-42)$

(2) $5 + (-11)$

(3) $(-9) + 14$

(4) $(-27) + 38 + (-53) + (-38)$

《解》(1) $(-25) + (-42) = -(25 + 42) = -67$

(2) $5 + (-11) = -(11 - 5) = -6$

(3) $(-9) + 14 = 14 - 9 = 5$

$$\begin{aligned} (4) \quad & (-27) + 38 + (-53) + (-38) \\ &= (-27) + (-53) + 38 + (-38) \\ &= -(27 + 53) + 38 - 38 = -80 \end{aligned}$$

求下列各式的值：

(1) $(-17) + (-28)$

(2) $7 + (-18)$

(3) $(-11) + 15$

(4) $19 + (-5) + (-2) + (-19)$

《解》

重點整理 整數的減法運算

1. 甲數減去乙數，就是甲數加上乙數的相反數。

例 $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$

2. 大數－小數：結果為正數。

例 $10 - 2 = 8$

3. 小數－大數：結果為負數。

例 $2 - 10 = 2 + (-10) = -(10 - 2) = -8$

2

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $18 - (-6)$

(2) $(-9) - 5$

(3) $(-8) - (-11)$

《解》 (1) $18 - (-6) = 18 + 6 = 24$

(2) $(-9) - 5 = (-9) + (-5) = -(9 + 5)$
 $= -14$

(3) $(-8) - (-11) = (-8) + 11 = 11 - 8 = 3$

求下列各式的值：

(1) $8 - (-20)$

(2) $(-17) - 18$

(3) $(-6) - (-15)$

《解》

重點整理 整數的乘法運算

1. 同號的二數相乘，其乘積為正數，即正正得正，負負得正。

例 $9 \times 4 = (-9) \times (-4) = 36$

2. 異號的二數相乘，其乘積為負數，即正負得負，負正得負。

例 $9 \times (-4) = -(9 \times 4) = -36$

$(-9) \times 4 = -(9 \times 4) = -36$

3. 任意數與0的乘積為0。

例 $5 \times 0 = 0$

4. (1) 偶數個負數連乘，其乘積為正數。 **例** $(-2) \times (-2) \times (-3) \times (-3) = 36$

(2) 奇數個負數連乘，其乘積為負數。 **例** $(-2) \times (-2) \times (-3) = -12$

1-3 指數

重點整理 指數律與性質

1. 設 a 為實數， n 為正整數，則 $\overbrace{a \times a \times a \cdots \times a}^{n \text{ 個 } a} = a^n$ ，其中 a 稱為底數， n 稱為指數。
2. 指數律與運算規則：設 a 、 b 是不等於 0 的整數， m 、 n 是正整數，則

$$\begin{array}{llll} (1) a^m \times a^n = a^{m+n} & (2) (a^m)^n = a^{mn} & (3) (ab)^n = a^n b^n & (4) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} & (6) a^0 = 1 & (7) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{array}$$

1

範例

練習

求下列各式中的未知數：

$$(1) 2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^a$$

$$(2) (5^7)^6 = 5^b$$

$$(3) \frac{5^7}{5^6} = 5^c$$

$$(4) 24^2 = 2^p \times 3^q$$

《解》 (1) $2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12} = 2^a$

$$\therefore a = 12$$

$$(2) (5^7)^6 = 5^{7 \times 6} = 5^{42} = 5^b \quad \therefore b = 42$$

$$(3) \frac{5^7}{5^6} = 5^{7-6} = 5^1 = 5^c \quad \therefore c = 1$$

$$\begin{aligned} (4) 24^2 &= (2^3 \times 3)^2 = 2^{3 \times 2} \times 3^2 \\ &= 2^6 \times 3^2 = 2^p \times 3^q \\ \therefore p &= 6, \quad q = 2 \end{aligned}$$

求下列各式中的未知數：

$$(1) 3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^a$$

$$(2) (7^5)^3 = 7^b$$

$$(3) \frac{7^6}{7^4} = 7^c$$

$$(4) 54^2 = 2^p \times 3^q$$

《解》

2

分數的四則運算

2-1 分數的加減法

重點整理 分數的加減法運算

一個負分數，可以將負號放在分子，也可以放在分母。 例 $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$

分數相加或相減時，先將它們通分，即以所有分母的最小公倍數作為新分母，再把每一分數擴分，然後再做分子相加或相減。

例 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

帶分數相加或相減時，可把帶分數的整數部分與分數部分分別相加或相減，然後再合併。或化成假分數再通分與擴分後相加或相減。

例 $13\frac{5}{7} + 9\frac{1}{7} = 13 + \frac{5}{7} + 9 + \frac{1}{7} = (13+9) + \left(\frac{5}{7} + \frac{1}{7}\right) = 22\frac{6}{7}$

$$2\frac{1}{3} - 1\frac{3}{5} = \frac{7}{3} - \frac{8}{5} = \frac{35-24}{15} = \frac{11}{15}$$

分數的運算結果須化成最簡分數。

1 範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{6}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right) - \frac{5}{11} \quad (2) \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$(3) 3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}$$

《解》 (1) $\frac{6}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right) - \frac{5}{11}$

$$= \frac{6+(-7)-5}{11} = -\frac{6}{11}$$

$$(2) \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12+10}{15} = \frac{22}{15}$$

$$(3) 3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} = \frac{7}{2} - \frac{8}{3} = \frac{21-16}{6} = \frac{5}{6}$$

求下列各式的值：

$$(1) \frac{3}{13} - \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{2}{13} \quad (2) \frac{6}{7} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(3) 4\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4}$$

《解》

2-2 分數的乘除法

重點整理 分數的乘法運算

1. 分數相乘時，只要把分子相乘作為新分子，分母相乘作為新分母，所得新分數就是它們的

乘積。即設 a ， b ， c ， d 皆為非零整數，則 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ 。

$$\boxed{\text{例}} \quad \frac{2}{3} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2 \times (-4)}{3 \times 5} = -\frac{8}{15}$$

2. 分數相乘時，若分子和分母有公因數，則可先約去公因數再相乘。

$$\boxed{\text{例}} \quad \left(-\frac{3}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{(-3) \times (-1)}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$$

1 範例

求下列各式的值：

$$(1) \frac{3}{8} \times \left(-\frac{4}{10}\right) \times \frac{14}{9}$$

$$(2) 3\frac{1}{2} \times \left(-1\frac{1}{9}\right) \times (-2)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{解} \rangle \quad (1) \quad & \frac{3}{8} \times \left(-\frac{4}{10}\right) \times \frac{14}{9} \\ & = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \left(\overset{-1}{\cancel{4}}\right) \times \overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{2}{\cancel{8}} \times \underset{5}{\cancel{10}} \times \underset{3}{\cancel{9}}} = -\frac{7}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 3\frac{1}{2} \times \left(-1\frac{1}{9}\right) \times (-2) \\ & = \frac{7}{2} \times \left(-\frac{10}{9}\right) \times (-2) \\ & = \frac{7 \times (-10) \times \left(\overset{-1}{\cancel{2}}\right)}{\underset{1}{\cancel{2}} \times 9} = \frac{70}{9} \end{aligned}$$

練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{7}{10} \times \left(-\frac{16}{21}\right) \times \frac{11}{8}$$

$$(2) \left(-4\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times 3$$

《解》

重點整理 分數的除法運算

1. 倒數：一個不為0的分數其分子和分母對調，所得新分數稱為原分數的倒數。

例 $\frac{4}{3}$ 的倒數為 $\frac{3}{4}$

2. 分數相除時就是被除數乘以除數的倒數，即設 a, b, c, d 皆為非零整數，則

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}。$$

例 $\frac{5}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$

3. 帶分數相乘或相除時，需先將帶分數化為假分數，再做乘除運算。

例 $3\frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{4}$

2

範例

練習

求下列各式的值：

(1) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9}$

(2) $\frac{11}{4} \div \left(-\frac{132}{9}\right)$

(3) $7\frac{1}{5} \div 4\frac{1}{2}$

《解》 (1) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3}{2}$

(2) $\frac{11}{4} \div \left(-\frac{132}{9}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{4} \times \left(-\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{132}}}\right) = -\frac{3}{16}$

(3) $7\frac{1}{5} \div 4\frac{1}{2} = \frac{36}{5} \div \frac{9}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{36}}}{5} \times \frac{2}{\underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{8}{5}$

求下列各式的值：

(1) $\frac{3}{4} \div \frac{4}{5}$

(2) $\frac{7}{5} \div \left(-\frac{91}{3}\right)$

(3) $8\frac{1}{3} \div 5\frac{1}{4}$

《解》

3

範例

練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{2}{3} \times \left(-2\frac{2}{5}\right) \div (-4) \div \frac{3}{10}$$

$$(2) \frac{3}{4} \div \left(\frac{9}{14} \times 3\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\langle\text{解}\rangle (1) \frac{2}{3} \times \left(-2\frac{2}{5}\right) \div (-4) \div \frac{3}{10}$$

$$= \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \times \left(-\frac{\cancel{12}^4}{\cancel{5}_1}\right) \times \left(-\frac{1}{\cancel{4}_2}\right) \times \frac{\cancel{10}^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(2) \frac{3}{4} \div \left(\frac{9}{14} \times 3\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \div \left(\frac{9}{\cancel{14}_2} \times \frac{\cancel{7}^1}{2}\right) - \frac{3+2}{6} = \frac{3}{4} \div \frac{9}{4} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{9}_3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{2-5}{6}$$

$$= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

求下列各式的值：

$$(1) 2 \div \left(-\frac{3}{4}\right) \times 1\frac{3}{4} \div (-7)$$

$$(2) \left(2 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \div \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

《解》

重點整理 繁分數化簡運算

設 a 、 b 、 c 、 d 均是不為 0 的整數，則

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \right) = \frac{ad}{bc} \quad (\text{內項乘積為分母，外項乘積為分子})。$$

4

範例

練習

求下列各值：

$$(1) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{7}} \quad (2) \frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{3}}$$

《解》 (1) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{7}} = \frac{\cancel{2} \times 7}{3 \times \cancel{6}_3} = \frac{7}{9}$

(2) $\frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{3}} = \frac{5 \times 3}{1 \times 1} = \frac{15}{1} = 15$

求下列各值：

$$(1) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} \quad (2) \frac{\frac{12}{1}}{\frac{7}{2}}$$

《解》

重點整理 比、比值與比例式

1. 比和比值：

(1) 已知 a 、 b 兩數，若 $b \neq 0$ ，則 a 與 b 的比為 $a:b$ ，其中 a 稱為前項， b 稱為後項，而 $\frac{a}{b}$ 稱為 $a:b$ 的比值。

例 4 和 9 的比為 $4:9$ ，其比值為 $\frac{4}{9}$

(2) 已知 a 、 b 、 m 三數，若 $b \neq 0$ ， $m \neq 0$ ，則 $a:b = ma:mb = \frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ 。

例 $3:2 = (5 \times 3):(5 \times 2) = \frac{3}{5}:\frac{2}{5}$

2. 比例式：

(1) 設 a 、 b 、 c 、 d 均為不等於 0 的實數，則 $a:b=c:d$ 稱為比例式，其中 a 、 d 稱為比例外項， b 、 c 稱為比例內項。

(2) 若 $a:b=c:d$ ，則 $ad=bc$ (外項乘積=內項乘積)。

例 $x:2=y:5 \Rightarrow 5x=2y$

(3) 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，則 $ad=bc$ (交叉相乘)。

例 $\frac{a}{b}=\frac{7}{3} \Rightarrow 3a=7b$

5

範例

練習

(1) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $3a=4b$ ，求 $a:b=?$

(2) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $\frac{2}{3}a=\frac{3}{5}b$ ，求 $a:b=?$

《解》(1) $3a=4b$

$$\Rightarrow a:b=4:3$$

(2) $\frac{2}{3}a=\frac{3}{5}b$

$$\Rightarrow a:b=\frac{3}{5}:\frac{2}{3}=9:10$$

(1) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $11a=7b$ ，求 $a:b=?$

(2) 已知 a 、 b 均為不等於 0 的實數，且 $\frac{9}{4}a=\frac{2}{3}b$ ，求 $a:b=?$

《解》

5

乘法公式與因式分解

5-1 乘法公式

重點整理 分配律與常用乘法公式

1. 乘法分配律：

$$(1) a(b+c) = ab+ac$$

$$(2) (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

2. 平方公式：

$$(1) \text{和的平方公式：} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) \text{差的平方公式：} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) \text{平方差公式：} (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

3. 立方公式：

$$(1) \text{立方和公式：} (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(2) \text{立方差公式：} (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

4. 性質符號變換：

$$(1) (-a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$(2) (-a+b)^2 = (b-a)^2 = (a-b)^2$$

$$(3) (-a+b)(-a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

5. 乘法公式延伸求值：

$$(1) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(2) (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$(3) (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

1

範例

練習

求下列各式的值：

(1) 207^2

(2) 996^2

(3) 2008×1992

(4) $198^2 - 98^2$

(5) $\left(26\frac{1}{2}\right)^2 - \left(23\frac{1}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{《解》 (1) } 207^2 &= (200+7)^2 \\ &= 200^2 + 2 \times 200 \times 7 + 7^2 \\ &= 40000 + 2800 + 49 = 42849 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } 996^2 &= (1000-4)^2 \\ &= 1000^2 - 2 \times 1000 \times 4 + 4^2 \\ &= 1000000 - 8000 + 16 \\ &= 992016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) } 2008 \times 1992 &= (2000+8)(2000-8) \\ &= 2000^2 - 8^2 \\ &= 4000000 - 64 \\ &= 3999936 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4) } 198^2 - 98^2 &= (198+98)(198-98) \\ &= 296 \times 100 = 29600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(5) } \left(26\frac{1}{2}\right)^2 - \left(23\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(26\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2}\right) \left(26\frac{1}{2} - 23\frac{1}{2}\right) \\ &= 50 \times 3 = 150 \end{aligned}$$

求下列各式的值：

(1) 103^2

(2) 598^2

(3) 206×194

(4) $299^2 - 199^2$

(5) $\left(65\frac{1}{2}\right)^2 - \left(34\frac{1}{2}\right)^2$

《解》

2

範例

練習

在下列各空格中填入適當的數：

$$(1) (20+8)(20^2 - 20 \times 8 + 8^2) = 20^3 + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) (100-2)(100^2 + 100 \times 2 + 2^2) = \underline{\hspace{2cm}} - 2^3$$

《解》(1) 由立方和公式知

$$\begin{aligned} & (20+8)(20^2 - 20 \times 8 + 8^2) \\ &= 20^3 + 8^3 \end{aligned}$$

(2) 由立方差公式知

$$\begin{aligned} & (100-2)(100^2 + 100 \times 2 + 2^2) \\ &= 100^3 - 2^3 \end{aligned}$$

在下列各空格中填入適當的數：

$$(1) (50+3)(50^2 - \underline{\hspace{2cm}} + 3^2) = 50^3 + 3^3$$

$$(2) (30-7)(\underline{\hspace{2cm}} + 30 \times 7 + 7^2) = 30^3 - 7^3$$

《解》

3

範例

練習

展開下列各式：

$$(1) -5x(x+2) \quad (2) x(3x+2y-4)$$

$$(3) (a+b)(x-2y) \quad (4) (x-4)(x+5)$$

$$(5) (3x-1)(-3x+2)$$

《解》(1) $-5x(x+2) = -5x^2 - 10x$

$$(2) x(3x+2y-4) = 3x^2 + 2xy - 4x$$

$$\begin{aligned} (3) (a+b)(x-2y) \\ = ax - 2ay + bx - 2by \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) (x-4)(x+5) &= x^2 + 5x - 4x - 20 \\ &= x^2 + x - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) (3x-1)(-3x+2) \\ = -9x^2 + 6x + 3x - 2 \\ = -9x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

展開下列各式：

$$(1) -6x(x-1) \quad (2) 5x(x-3y+2)$$

$$(3) (3a-b)(2x+y) \quad (4) (x+3)(x-4)$$

$$(5) (-2x-1)(2x+3)$$

《解》

4

範例

練習

展開下列各式：

(1) $(2x+3y)^2$ (2) $(5x^2-4y)^2$

《解》 (1) $(2x+3y)^2$

$$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

(2) $(5x^2-4y)^2$

$$= (5x^2)^2 - 2 \times 5x^2 \times 4y + (4y)^2$$

$$= 25x^4 - 40x^2y + 16y^2$$

展開下列各式：

(1) $(3x-2y)^2$ (2) $(7x+8y^2)^2$

《解》

5

範例

練習

展開下列各式：

(1) $(-3x+2)(-3x-2)$

(2) $(1-x)(1+x)(1+x^2)$

(3) $(3a-b+2)(3a-b-2)$

《解》 (1) $(-3x+2)(-3x-2)$

$$= (3x-2)(3x+2)$$

$$= (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$$

(2) $(1-x)(1+x)(1+x^2)$

$$= (1-x^2)(1+x^2) = 1^2 - (x^2)^2$$

$$= 1 - x^4$$

(3) $(3a-b+2)(3a-b-2)$

$$= (3a-b)^2 - 2^2$$

$$= 9a^2 - 6ab + b^2 - 4$$

展開下列各式：

(1) $(-7+2x)(-7-2x)$

(2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

(3) $(2x+3y-4)(2x+3y+4)$

《解》

6

範例

展開下列各式：

(1) $(3x+2)(9x^2-6x+4)$

(2) $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{6}+\frac{1}{9}\right)$

(3) $(7a^2+3b^2)(49a^4-21a^2b^2+9b^4)$

《解》 (1) 原式 $= (3x+2)[(3x)^2-3x \times 2+2^2]$
 $= (3x)^3+2^3=27x^3+8$

(2) 原式

$$= \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x}{2} \times \frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{x^3}{8}-\frac{1}{27}$$

(3) 原式

$$= (7a^2+3b^2)$$

$$\left[(7a^2)^2-7a^2 \times 3b^2+(3b^2)^2\right]$$

$$= (7a^2)^3+(3b^2)^3=343a^6+27b^6$$

練習

展開下列各式：

(1) $(2x-5)(4x^2+10x+25)$

(2) $\left(\frac{x}{7}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{49}-\frac{x}{28}+\frac{1}{16}\right)$

(3) $(a^2-4b^2)(a^4+4a^2b^2+16b^4)$

《解》

7

範例

若 $a+b=4$ ， $ab=3$ ，求：

(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3 (3) $(a-b)^2$

《解》 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
 $=4^2-2 \times 3=10$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
 $=4 \times (10-3)=28$

(3) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
 $=4^2-4 \times 3=4$

練習

若 $a+b=5$ ， $ab=4$ ，求：

(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3 (3) $(a-b)^2$

《解》

8

範例

練習

若 $a - b = -5$, $ab = 3$, 求 :

$$(1) a^2 + b^2 \quad (2) a^3 - b^3 \quad (3) (a + b)^2$$

《解》 (1) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
 $= (-5)^2 + 2 \times 3 = 31$
 (2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 $= (-5) \times (31 + 3) = -170$
 (3) $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
 $= (-5)^2 + 4 \times 3 = 37$

若 $a - b = -4$, $ab = 5$, 求 :

$$(1) a^2 + b^2 \quad (2) a^3 - b^3 \quad (3) (a + b)^2$$

《解》

5-2 因式分解

重點整理 因式分解

- 1. 由數字與文字相乘而得的式子，稱為單項式。
例 $5x$, $2xy$, $3ab$
- 2. 由有限個單項式的和組成的式子，稱為多項式。
例 $x^2 + x + (-20)$, $a^2 + (-2ab) + b^2$
- 3. 將一個多項式分解為質因式的連乘積，則此過程稱為因式分解。
- 4. 常用因式分解的方法：

- (1)直接提公因式法 例 $ab + ac = a(b + c)$
- (2)分組提公因式法 例 $ab + ac + bd + cd = a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$
- (3)乘法公式法 例 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

1

1

-2

+1
- (4)十字交乘法 例 $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

-2

+1

-2

+1

-2 + 1 = -1

1

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $xy - xz + x$

(2) $2x^2y - 3xy^2 + 4xy$

(3) $4x^3y^2 - 5xy^2 + 3xy^3$

《解》(1) 原式 $= x(y - z + 1)$

(2) 原式 $= xy(2x - 3y + 4)$

(3) 原式 $= xy^2(4x^2 - 5 + 3y)$

因式分解下列各式：

(1) $ab + ac - a$

(2) $5a^2b + 2ab - 7ab^2$

(3) $a^3b - 2a^2b^2 - 4a^2b^3$

《解》

2

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $(x+3)^2 - 4(x+3)$

(2) $5(x-1) - (x-1)^2$

(3) $(x+1)(x+2)^2 - (x+1)^2(x+2)$

《解》(1) 原式 $= (x+3)(x+3-4)$
 $= (x+3)(x-1)$

(2) 原式 $= (x-1)[5 - (x-1)]$
 $= (x-1)(5-x+1)$
 $= (x-1)(6-x)$

(3) 原式
 $= (x+1)(x+2)[x+2 - (x+1)]$
 $= (x+1)(x+2)(x+2-x-1)$
 $= (x+1)(x+2)$

因式分解下列各式：

(1) $(x-7)^2 - 2(x-7)$

(2) $4(x+2) - (2+x)^2$

(3) $(2x-1)^2(x+3) + (2x-1)(x+3)^2$

《解》

3

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $27x^3 - 9x^2 + 3x - 1$

(2) $5xy - 5y + 3x - 3$

《解》 (1) 原式 $= (27x^3 - 9x^2) + (3x - 1)$
 $= 9x^2(3x - 1) + (3x - 1)$
 $= (3x - 1)(9x^2 + 1)$

(2) 原式 $= (5xy - 5y) + (3x - 3)$
 $= 5y(x - 1) + 3(x - 1)$
 $= (x - 1)(5y + 3)$

因式分解下列各式：

(1) $10x^3 + 15x^2 - 2x - 3$

(2) $2x + 2xy - 3y - 3$

《解》

4

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $9a^2 - 25b^2$

(2) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

(3) $a^4 - 81b^4$

《解》 (1) 原式 $= (3a)^2 - (5b)^2$
 $= (3a + 5b)(3a - 5b)$

(2) 原式 $= (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3b + (3b)^2$
 $= (2a + 3b)^2$

(3) 原式 $= (a^2)^2 - (9b^2)^2$
 $= (a^2 + 9b^2)(a^2 - 9b^2)$
 $= (a^2 + 9b^2)[a^2 - (3b)^2]$
 $= (a^2 + 9b^2)(a + 3b)(a - 3b)$

因式分解下列各式：

(1) $16x^2 - 49y^2$

(2) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

(3) $16a^4 - b^4$

《解》

5

範例

練習

因式分解下列各式：

$$(1) 4 - (x + y)^2 \quad (2) 64x^3 - 27$$

$$(3) x^6 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{《解》 (1) 原式} &= 2^2 - (x + y)^2 \\ &= (2 + x + y)[2 - (x + y)] \\ &= (2 + x + y)(2 - x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= (4x)^3 - 3^3 \\ &= (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1) \\ &\quad (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

因式分解下列各式：

$$(1) 9 - (x - y)^2 \quad (2) 8x^3 + 125$$

$$(3) x^6 - 64$$

《解》

6

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $x^2 - x - 20$ (2) $x^2 + 3x + 2$

(3) $x^2 - 3x - 28$

《解》(1) 原式 = $(x+4)(x-5)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad +4 \\ \times \quad -5 \\ \hline 4 + (-5) = -1 \end{array}$$

(2) 原式 = $(x+1)(x+2)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad +1 \\ \times \quad +2 \\ \hline 1 + 2 = 3 \end{array}$$

(3) 原式 = $(x+4)(x-7)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad +4 \\ \times \quad -7 \\ \hline 4 + (-7) = -3 \end{array}$$

因式分解下列各式：

(1) $x^2 + x - 12$ (2) $x^2 - 4x - 32$

(3) $x^2 - 7x + 12$

《解》

7

範例

練習

因式分解下列各式：

(1) $2x^2 - 7x + 6$ (2) $5x^2 - 14x - 24$

(3) $6x^2 - 13x + 6$

《解》(1) 原式 = $(x-2)(2x-3)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \\ \times \quad -3 \\ \hline -4 + (-3) = -7 \end{array}$$

(2) 原式 = $(x-4)(5x+6)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \\ \times \quad +6 \\ \hline -20 + 6 = -14 \end{array}$$

(3) 原式 = $(2x-3)(3x-2)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \\ \times \quad -2 \\ \hline -9 + (-4) = -13 \end{array}$$

因式分解下列各式：

(1) $2x^2 + x - 15$

(2) $3x^2 - 17x + 10$

(3) $6x^2 - 11x + 4$

《解》

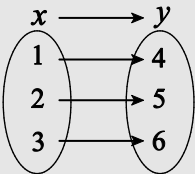
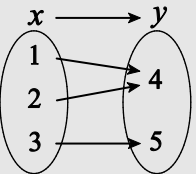
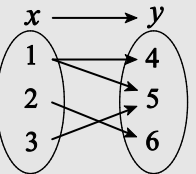
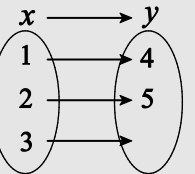
8

函數

8-1 函數的定義與判別

重點整理 函數的定義與判別

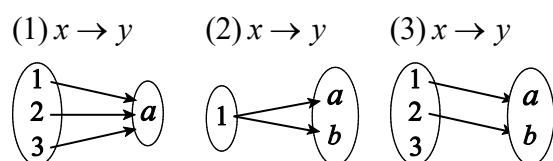
1. 函數的定義：設 x 、 y 為兩個變數，對於每一個 x 值，必有一個且只有一個 y 值與之對應，則稱 y 是 x 的函數，記作 $y = f(x)$ ，其中 x 稱為自變數， y 稱為應變數。
2. 函數的判別：在 x 與 y 的對應關係中，若為「一對一」或「多對一」，則為函數；若為「一對多」或「一對無」，則不為函數。

y 是 x 的函數		y 不是 x 的函數	
一對一	多對一	一對多	一對無
			

1

範例

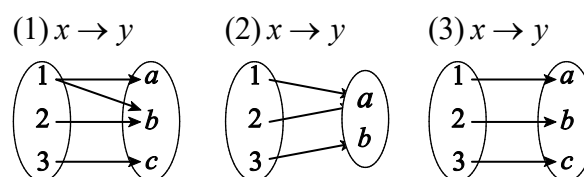
試分辨下列各 x 、 y 關係，何者具有 y 是 x 的函數關係？



- 《解》(1) $\because$ 對於每一個 x 值均恰可對應一個 y 值，即多對一
 $\therefore y$ 是 x 的函數
- (2) $\because$ 1 對應出 a 、 b 二值，即一對多
 $\therefore y$ 不是 x 的函數
- (3) $\because$ 3 沒有 y 值與之對應

練習

試分辨下列各 x 、 y 關係，何者具有 y 是 x 的函數關係？



《解》

$\therefore$ 不符合每一個 x 值均可對應
 出一個 y 值，即一對無
 $\therefore y$ 不是 x 的函數
 故選(1)

重點整理 函數值

在函數 $y = f(x)$ 中，當 $x = a$ 時， $y = f(a)$ ，則 $f(a)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 的函數值。

例 設函數 $f(x) = x + 1$ ，則給定 $x = 2$ 時，函數值為 $f(2) = 2 + 1 = 3$

2

範例

練習

設 $f(x) = -3x + 5$ ，試求 $f(3)$ 的值。

《解》 $f(3) = -3 \times 3 + 5 = -9 + 5 = -4$

設 $f(x) = 4x - 13$ ，試求 $f(11)$ 的值。

《解》

3

範例

練習

設 $f(x) = 4$ ，試求 $f(-2)$ 的值。

《解》 $f(-2) = 4$

設 $f(x) = -5$ ，試求 $f(3)$ 的值。

《解》

4

範例

練習

設 $f(x) = 5|x| + 1$ ，試求 $f(-4)$ 的值。

《解》 $f(-4) = 5 \times |-4| + 1 = 20 + 1 = 21$

設 $f(x) = -6|x| + 3$ ，試求 $f(7)$ 的值。

《解》

5

範例

練習

設 $f(x) = 3x^2 - x - 10$ ，試求 $f(-7)$ 的值。

$$\begin{aligned}\langle\text{解}\rangle \quad f(-7) &= 3 \times (-7)^2 - (-7) - 10 \\ &= 147 + 7 - 10 = 144\end{aligned}$$

設 $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ ，試求 $f(-4)$ 的值。

《解》

6

範例

練習

設 $f(x+1) = x+3$ ，試求下列各值：

(1) $f(0)$ (2) $f(1)$ (3) $f(5)$

$$\begin{aligned}\langle\text{解}\rangle \quad (1) \quad f(0) &= f(-1+1) = -1+3 = 2 \\ (2) \quad f(1) &= f(0+1) = 0+3 = 3 \\ (3) \quad f(5) &= f(4+1) = 4+3 = 7\end{aligned}$$

設 $f(2x-1) = -x+4$ ，試求下列各值：

(1) $f(-1)$ (2) $f(9)$ (3) $f(-5)$

《解》

7

範例

練習

設 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ，試求下列各值：

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (3) $-f(2)$

$$\begin{aligned}\langle\text{解}\rangle \quad (1) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\ (2) \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} \\ (3) \quad f(2) &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ \therefore -f(2) &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

設 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ，試求下列各值：

(1) $f(3)$ (2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ (3) $f(-3)$

《解》

8

範例

練習

已知 $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = x$ ，試求下列各值：

(1) $f(1)$ (2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

《解》 (1) $f(1) = f\left(\frac{1}{0+1}\right) = 0$

(2) $f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2+1}\right) = 2$

已知 $f\left(\frac{2x-1}{x}\right) = -x$ ，試求下列各值：

(1) $f(1)$ (2) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

《解》

8-2 線型函數

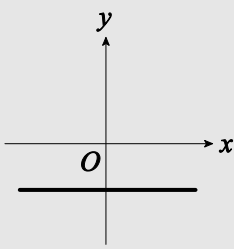
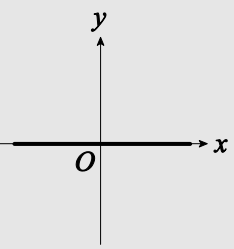
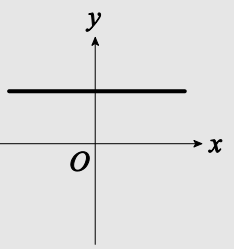
重點整理 函數圖形與線型函數及其圖形

1. 函數圖形：
在坐標平面上，將所有滿足 $y = f(x)$ 的點 (x, y) 描繪出來所得的圖形，稱為 $f(x)$ 的函數圖形。

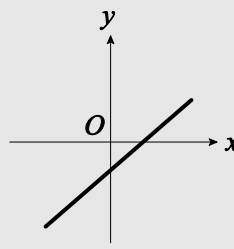
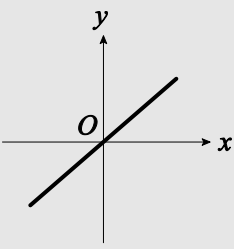
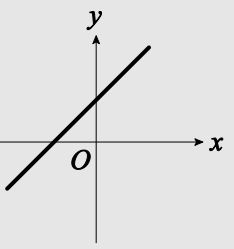
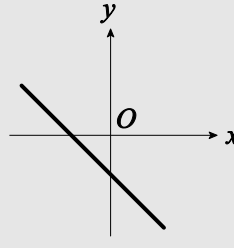
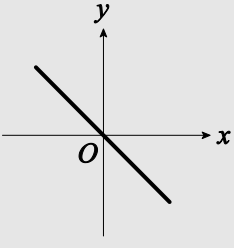
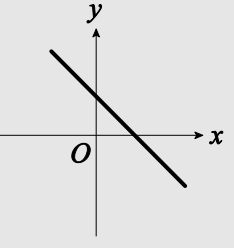
2. 線型函數：
形如 $y = f(x) = ax + b$ ，其中 a 、 b 為實數，稱為線型函數。

例 $y = f(x) = 2x - 3$ ， $y = f(x) = -x$ ， $y = f(x) = 7$ 都是線型函數

(1) 當 $a = 0$ 時， $f(x) = b$ 為常數函數，圖形為水平線。

$f(x) = b$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a = 0$			

(2) 當 $a \neq 0$ 時， $f(x) = ax + b$ 為一次函數，圖形為斜直線。

$f(x) = ax + b$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

3. $x = h$ 的圖形為鉛垂線，並非 x 的函數圖形。

例 $x = 2$ ， $x = -3$ 的圖形都是鉛垂線

1

範例

練習

若函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(-5, 6)$ 、 $(-1, 2)$ 、 $(3, 10)$ 三點，試求 $f(-5) - f(3) + f(-1)$ 的值。

《解》 $\because f(x)$ 的圖形過 $(-5, 6)$ ， $(-1, 2)$ ， $(3, 10)$

$$\therefore f(-5) = 6, f(-1) = 2, f(3) = 10$$

$$\text{故 } f(-5) - f(3) + f(-1)$$

$$= 6 - 10 + 2 = -2$$

若函數 $f(x)$ 的圖形通過 $(4, -7)$ 、 $(0, 3)$ 、 $(-2, -1)$ 三點，試求 $f(4) + f(0) - f(-2)$ 的值。

《解》

2

範例

練習

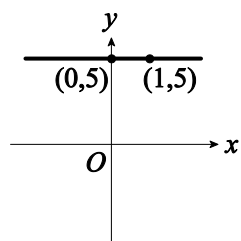
在坐標平面上，畫出下列各函數的圖形：

(1) $f(x) = 5$

(2) $f(x) = x + 3$

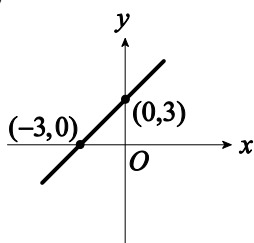
《解》(1) $y = f(x) = 5$

x	0	1
y	5	5



(2) $y = f(x) = x + 3$

x	0	-3
y	3	0



在坐標平面上，畫出下列各函數的圖形：

(1) $f(x) = -3$

(2) $f(x) = -x + 2$

《解》

3

範例

練習

設函數 $y = f(x) = x - 2$ ，試求：

- (1) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸、 y 軸的交點坐標
- (2) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與兩軸所圍的三角形面積

《解》 (1) $y = f(x) = x - 2$

x	2	0
y	0	-2

$\therefore$ 與 x 軸的交點為 $(2, 0)$ ，

與 y 軸的交點為 $(0, -2)$

$$(2) \text{面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times |-2| = 2$$

設函數 $y = f(x) = -2x + 6$ ，試求：

- (1) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸、 y 軸的交點坐標
- (2) 函數 $y = f(x)$ 的圖形與兩軸所圍的三角形面積

《解》

4

範例

練習

設函數 $f(x) = 5x + b$ ，且 $f(1) = 3$ ，試求 b 值。

《解》 $\because f(1) = 3$

$$\therefore 5 + b = 3 \Rightarrow b = -2$$

設函數 $f(x) = -2x + b$ ，且 $f(5) = -6$ ，試求 b 值。

《解》

5

範例

練習

已知函數 $f(x) = ax + b$ ，且 $f(1) = 3$ ， $f(3) = 11$ ，試求：

- (1) a 、 b 的值 (2) $f(-2)$ 的值

$$\text{《解》 (1) } \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(3) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = 4x - 1$$

$$\therefore f(-2) = -8 - 1 = -9$$

已知函數 $f(x) = ax + b$ ，且 $f(-2) = 4$ ， $f(5) = -3$ ，試求：

- (1) a 、 b 的值 (2) $f(1)$ 的值

《解》

8-3

二次函數

重點整理

二次函數及其圖形

1. 二次函數：

形如 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數， $a \neq 0$ ，稱為二次函數。

例 $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$ ， $y = f(x) = -2x^2$ 都是二次函數

2. 二次函數的圖形：

(1)二次函數的圖形為開口向上或向下、左右對稱的拋物線。

(2)將二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 經配方法化為 $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$ ，即

$$\begin{aligned} y = f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

型式	一般式		頂點式	
二次函數	$y = ax^2 + bx + c$		$y = a(x - h)^2 + k$	
頂點坐標	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$		(h, k)	
對稱軸	$x = -\frac{b}{2a}$		$x = h$	
係數 a	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
開口方向	向上	向下	向上	向下
頂點	最低點	最高點	最低點	最高點
極值	當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最小值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$	當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最大值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$	當 $x = h$ 時， y 有最小值 k	當 $x = h$ 時， y 有最大值 k
圖示				

開口大小	$ a $ 愈大，開口愈小； $ a $ 愈小，開口愈大	
與 y 軸交點	$(0, c)$	$(0, ah^2 + k)$

3. 二次函數圖形與兩軸的交點：

設二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數且 $a \neq 0$

(1) 與 x 軸交點：令 $y = 0$ 代入得一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，求解。

(2) 與 y 軸交點：令 $x = 0$ 代入得 $y = c$ ，即交點為 $(0, c)$

(3) 與 x 軸的交點個數：可利用判別式 $D = b^2 - 4ac$ 判斷

判別式	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
交點個數	2	1	0
交點坐標	$\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, 0 \right)$ $\left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, 0 \right)$	$\left(\frac{-b}{2a}, 0 \right)$	無交點

1

範例

練習

試求下列各二次函數的頂點坐標與對稱軸：

(1) $y = x^2$ (2) $y = -2x^2 + 1$ (3) $y = (x - 1)^2$

《解》(1) 頂點 $(0, 0)$ ，對稱軸 $x = 0$

(2) 頂點 $(0, 1)$ ，對稱軸 $x = 0$

(3) 頂點 $(1, 0)$ ，對稱軸 $x = 1$

試求下列各二次函數的頂點坐標與對稱軸：

(1) $y = -x^2$ (2) $y = 3x^2 - 2$ (3) $y = (x + 5)^2$

《解》

2

範例

練習

試求下列函數圖形的最高點或最低點：

(1) $f(x) = (x - 1)^2 + 4$

(2) $f(x) = -5(x + 2)^2 + 1$

《解》(1) $\because a = 1 > 0$

$\therefore$ 圖形的最低點為 $(1, 4)$

(2) $\because a = -5 < 0$

$\therefore$ 圖形的最高點為 $(-2, 1)$

試求下列函數圖形的最高點或最低點：

(1) $f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$

(2) $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}$

《解》

3

範例

練習

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = 4x^2 + 1$

(2) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

(3) $f(x) = 2(x+5)^2 + 6$

《解》 (1) $f(x) = 4x^2 + 1 \geq 1$

當 $x = 0$ 時， $f(x)$ 有最小值 1

(2) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3 \leq 3$

當 $x = -1$ 時， $f(x)$ 有最大值 3

(3) $f(x) = 2(x+5)^2 + 6 \geq 6$

當 $x = -5$ 時， $f(x)$ 有最小值 6

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = 3x^2 + 2$

(2) $f(x) = -4(x-5)^2 + 4$

(3) $f(x) = 5(x-4)^2 - 1$

《解》

4

範例

練習

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = x^2 + 4x$

(2) $f(x) = -2x^2 + 4x$

《解》 (1) $f(x) = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2$
 $= (x+2)^2 - 4 \geq -4$

當 $x = -2$ 時， $f(x)$ 有最小值 -4

(2) $f(x) = -2x^2 + 4x = -2(x^2 - 2x)$

$= -2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2)$

$= -2(x-1)^2 + 2 \leq 2$

當 $x = 1$ 時， $f(x)$ 有最大值 2

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = x^2 + 6x$

(2) $f(x) = -3x^2 - 12x$

《解》

5

範例

二次函數 $y = x^2 - 3x - 4$ 的圖形與 x 軸交於 A 、 B 兩點，與 y 軸交於 C 點， O 是原點，求 $\triangle ABC$ 的面積。

《解》 令 $y = 0$ ，則

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ 或 } -1$$

$$\therefore A(4, 0), B(-1, 0)$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 則 } y = -4 \quad \therefore C(0, -4)$$

$$\therefore \overline{AB} = 5, \overline{OC} = 4$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

練習

二次函數 $y = -x^2 - 3x + 10$ 的圖形與 x 軸交於 A 、 B 兩點，與 y 軸交於 C 點， O 為原點，求 $\triangle ABC$ 的面積。

《解》

6

範例

求下列各二次函數圖形與 x 軸的交點個數：

$$(1) y = -2x^2 + 3x + 1$$

$$(2) y = 3x^2 + x + 2$$

$$(3) y = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{《解》 (1) } \because D = 3^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 17 > 0$$

$\therefore$ 有 2 個交點

$$(2) \because D = 1^2 - 4 \times 3 \times 2 = -23 < 0$$

$\therefore$ 0 個交點

$$(3) \because D = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$\therefore$ 有 1 個交點

練習

求下列各二次函數圖形與 x 軸的交點個數：

$$(1) y = x^2 + 2x + 4$$

$$(2) y = x^2 + 10x + 25$$

$$(3) y = -3x^2 - x + 1$$

《解》

重點整理 二次函數的假設法

二次函數的假設法：

類型	條件	假設	例
頂點型	頂點 $(0,0)$	$y = ax^2$	已知頂點 $(0,0)$ $\Rightarrow$ 設 $y = ax^2$
	頂點 $(0,k)$	$y = ax^2 + k$	已知頂點 $(0,5)$ $\Rightarrow$ 設 $y = ax^2 + 5$
	頂點 $(h,0)$	$y = a(x-h)^2$	已知頂點 $(2,0)$ $\Rightarrow$ 設 $y = a(x-2)^2$
	頂點 (h,k)	$y = a(x-h)^2 + k$	已知頂點 $(-1,4)$ $\Rightarrow$ 設 $y = a(x+1)^2 + 4$
	對稱軸 $x = h$	$y = a(x-h)^2 + k$	已知對稱軸 $x = 6$ $\Rightarrow$ 設 $y = a(x-6)^2 + k$
	在 $x = h$ 時， y 有最大值 (最小值) k	$y = a(x-h)^2 + k$	在 $x = 4$ 時， y 有最小值 -5 $\Rightarrow$ 設 $y = a(x-4)^2 - 5$
兩點型	與 x 軸交於 $(\alpha,0)$ ， $(\beta,0)$ 兩點	$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ 或 $y = a\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + k$	與 x 軸交於 $(-3,0)$ ， $(5,0)$ 兩點 $\Rightarrow$ 設 $y = a(x+3)(x-5)$
	通過 (α,m) ， (β,m) 兩點	$y = a(x-\alpha)(x-\beta) + m$ 或 $y = a\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + k$	通過 $(-2,3)$ ， $(6,3)$ 兩點 $\Rightarrow$ 設 $y = a(x+2)(x-6) + 3$
三點型	通過相異三點	$y = ax^2 + bx + c$	通過 $(0,-2)$ ， $(1,1)$ ， $(3,5)$ 三點 $\Rightarrow$ 設 $y = ax^2 + bx + c$

7

範 例

練 習

求滿足下列各條件的二次函數：

(1)頂點 $(0,0)$ 且通過點 $(2,4)$

《解》 (1) 設 $y = ax^2$

$(2,4)$ 代入得 $4a = 4 \Rightarrow a = 1$

$\therefore y = x^2$

求滿足下列各條件的二次函數：

(1)頂點 $(0,0)$ 且通過點 $(2,-1)$

《解》

(2)頂點 $(0, -2)$ 且通過點 $(-3, -11)$

(3)頂點 $(-3, 0)$ 且通過點 $(-1, -6)$

《解》(2) 設 $y = ax^2 - 2$

$$(-3, -11) \text{ 代入得 } 9a - 2 = -11$$

$$\Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$$

$$\therefore y = -x^2 - 2$$

(3) 設 $y = a(x+3)^2$

$$(-1, -6) \text{ 代入得 } 4a = -6$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+3)^2$$

(2)頂點 $(0, 1)$ 且通過點 $(4, 9)$

(3)頂點 $(2, 0)$ 且通過點 $(5, 6)$

《解》

8

範例

練習

求滿足下列各條件的二次函數：

(1) 以 $x = -1$ 為對稱軸，且通過 $(-2, 3)$ ， $(1, -3)$ 兩點

(2) 圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ ， $(5, 0)$ 兩點，且通過點 $(4, 9)$

《解》(1) 設 $y = a(x+1)^2 + k$

$$(-2, 3), (1, -3) \text{ 代入得}$$

$$\begin{cases} a+k=3 \\ 4a+k=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ k=5 \end{cases}$$

$$\therefore y = -2(x+1)^2 + 5$$

$$= -2x^2 - 4x + 3$$

(2) 設 $y = a(x-1)(x-5)$

$$(4, 9) \text{ 代入得 } a \times 3 \times (-1) = 9$$

$$\Rightarrow a = -3$$

$$\therefore y = -3(x-1)(x-5)$$

$$= -3(x^2 - 6x + 5)$$

$$= -3x^2 + 18x - 15$$

求滿足下列各條件的二次函數：(答案以一般式表示)

(1) 以 $x = 2$ 為對稱軸，且通過 $(0, 7)$ ， $(5, 12)$ 兩點

(2) 圖形與 x 軸交於 $(-3, 0)$ ， $(2, 0)$ 兩點，且通過點 $(0, -12)$

《解》

9

範例

練習

設二次函數 $f(x)$ 在 $x = -1$ 有最大值 5，且圖形通過點 $(4, -45)$ ，求 $f(1)$ 的值。

《解》 設 $f(x) = a(x+1)^2 + 5$

$$(4, -45) \text{ 代入得 } f(4) = 25a + 5 = -45$$

$$\Rightarrow 25a = -50 \Rightarrow a = -2$$

$$\therefore f(x) = -2(x+1)^2 + 5$$

$$\text{故 } f(1) = -2 \times 4 + 5 = -3$$

設二次函數 $f(x)$ 在 $x = 2$ 有最小值 -6 ，且圖形通過點 $(0, 6)$ ，求 $f(5)$ 的值。

《解》

10

範例

練習

已知二次函數 $y = 2x^2 + ax + 62$ ，當 $x = 3$ 時，有最小值 b ，求 $a + b$ 的值。

《解》 $y = 2x^2 + ax + 62 = 2(x-3)^2 + b$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + b$$

$$= 2x^2 - 12x + 18 + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ 62 = 18 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 44 \end{cases}$$

$$\therefore a + b = -12 + 44 = 32$$

已知二次函數 $y = -3x^2 + ax - 14$ ，當 $x = 1$ 時，有最大值 b ，求 $a - b$ 的值。

《解》

11

範例

練習

已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(0) = 1$ ， $f(1) = 3$ ， $f(-1) = 7$ ，試求 $f(x)$ 。

《解》 $\therefore \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 3 \\ f(-1) = 7 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} 0 + 0 + c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ a - b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = 4x^2 - 2x + 1$$

已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(0) = -2$ ， $f(1) = 2$ ， $f(-2) = 8$ ，試求 $f(x)$ 。

《解》