以下內容擷取於
龍騰版教科書銜接教材

1 乘法公式與因式分解

重點整理

一、分配律：

1. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 。

2. $(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。

二、乘法公式：

1. 乘法公式：

(1) 和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。

(2) 差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

(3) 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

2. 乘法公式：【高中教材】

(1) 三數和的平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 。

(2) 和的立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 。

(3) 差的立方公式：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 。

(4) 立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 。

(5) 立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 。

三、因式分解：

1. 提公因式：

例：$(x+1)(2x+3)-(x+1)(x-1)=(x+1)((2x+3)-(x-1))=(x+1)(x+4)$ 。

2. 利用乘法公式：

例：$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$ 。

3. 十字交乘法：

例：$3x^2-5x+2=(x-1)(3x-2)$ 。

$$\begin{array}{ccc} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -1 \\ 3x & & -2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-2x-3x=-5x} \end{array}$$

例題 1

展開下列各式：

(1) $(x+1)(y-4)$　　(2) $(x+3y)(2x+y-1)$

例題 2

展開下列各式：

(1) $(3x+4)^2$　　(2) $(2x^2+3y)^2$

例題 3

展開下列各式：

(1) $(5x-3)^2$　　(2) $(x-2y^2)^2$

例題 4

展開下列各式：

(1) $(-3x+2)(-3x-2)$　　(2) $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

例題 5

因式分解下列各式：

(1) $(a+3)^2-5(a+3)$　　(2) $(x+y)(x+2y)^2-(x+y)^2(x+2y)$

例題 6

因式分解下列各式：

(1) x^2+4x+4　　(2) $4x^2-20x+25$

例題 7

因式分解下列各式：

(1) $6x^2-13x+6$　　(2) $6x^2+x-35$

例題 8

因式分解下列各式：

(1) $(a+b)^2-3(a+b)+2$　　(2) $2(a-2b)^2-a+2b-15$

例題 9【高中教材】

展開下列各式：

(1) $(x+2y)^3$　　(2) $(3a-2b)^3$

例題 10【高中教材】

展開下列各式：

(1) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$　　(2) $(5a^2+2b^2)(25a^4-10a^2b^2+4b^4)$

2 二次方根

重點整理

一、平方根的意義：

1. 當b的平方等於a，即$b^2=a$時，稱b是a的平方根。

   例：2與-2都是4的平方根。

2. 每一個正數a恰有兩個平方根，其中$\sqrt{a}$表示正平方根，$-\sqrt{a}$表示負平方根。

   例：4的正平方根為$\sqrt{4}=2$，負平方根為$-\sqrt{4}=-2$。

二、二次方根的運算：

設$a>0$，$b>0$。

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$。
2. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$。
3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

三、有理化分母：

設$a>0$，$b>0$。

1. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{a\times b}{b\times b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$。

   例：$\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1\times 2}{2\times 2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

2. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$。

   例：$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$。

★四、雙重根式的化簡：【高中教材】

設$a>0$，$b>0$且$a>b$。

1. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。
2. $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$。

例題 1

求下列各數的平方根：

(1) 169　　(2) 47　　(3) 0

例題 2

(1) 化簡 $2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-18\sqrt{3}$ 。

(2) 化簡 $\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$ 。

例題 3

化簡 $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{24}-\sqrt{216}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ 。

例題 4

化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{3}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{18}+\sqrt{72}$ 。

例題 5

(1) 化簡$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$。

(2) 化簡$\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$。

例題 6

已知$x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，求

(1) xy　　(2) $x+y$　　(3) x^2+y^2

例題 7

設$a=7+\sqrt{35}$，則a在哪兩個連續整數之間？

例題 8

根據調查：冰川融化消失約 12 年後，地衣這種微小的植物，會開始在岩石之間生長，其生長的形式有如圓圈一般，且其直徑d（毫米）與冰川消失後的年數t有以下關係：

$$d=7\times\sqrt{(t-12)}\text{ ，}t\geq 12\text{ 。}$$

利用以上公式，求冰川消失 20 年後的地衣直徑。

例題 9【高中教材】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

例題 10【高中教材】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{8+\sqrt{60}}$　　(2) $\sqrt{8-\sqrt{28}}$

3 指數與科學記號

重點整理

一、指數記法：

當一個數a連乘n次時，簡記為a^n的形式，其中a稱為底數，n稱為指數。

例：$2\times2\times2\times2\times2$ 簡記成2^5，讀作「二的五次方」。

二、指數的運算：

設a、b是不為0的數，且m、n為非負整數。

1. $a^0=1$。例：$5^0=1$。
2. $a^m\times a^n=a^{m+n}$。例：$2^4\times2^3=2^{4+3}=2^7$。
3. $a^m\div a^n=a^{m-n}$。例：$2^4\div2^3=2^{4-3}=2^1$。
4. $\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$。例：$\left(2^4\right)^3=2^{4\times3}=2^{12}$。
5. $\left(a\times b\right)^n=a^n\times b^n$。例：$\left(2\times3\right)^4=2^4\times3^4$。

三、比較a^m與a^n的大小關係：

設a為正數，n為正整數。

1. 當底數$a>1$時，若指數n愈大，則a^n的值愈大。例：$(1.1)^3>(1.1)^2$。
2. 當底數$0<a<1$時，若指數n愈大，則a^n的值愈小。例：$(0.9)^3<(0.9)^2$。

四、整數指數與有理數指數：【高中教材】

設a為正數，n為正整數，m為整數。

1. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。例：$2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$。
2. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。例：$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$。
3. $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$。例：$5^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{5^3}=5\sqrt{5}$。

整數指數與有理數指數仍然滿足指數律。

五、科學記號：

把一個正數記為$a\times10^n$的形式（其中$1\le a<10$，n為整數），我們稱此形式為科學記號。

例：1230000 的科學記號為1.23×10^6。

例題 1

計算下列各式的值：

(1) $(-2)^5(-2)^3$ (2) $(-2)^5 \div (-2)^2$ (3) $\left((-2)^3\right)^2$

例題 2

計算下列各式的值：

(1) $(-6)^3 \div 3^3 \times 5^2 \div (-2)^6$ (2) $\left(3 \times 5^2\right)^2 \div 25^2 \times 6^4 \div \left(2^2 \times 9\right)^2$

例題 3

在一實驗室中，原有100個細菌，每經過1分鐘，細菌的數量會增加為原來的2倍。

(1) 求4分鐘後的細菌數量。

(2) 16分鐘後的細菌數是8分鐘後的細菌數的多少倍？

例題 4

比較下列各式 a 、 b 、 c 的大小：

(1) $a=1.01^5$ ， $b=1.01^6$ ， $c=1.01^7$　　(2) $a=\left(\frac{1}{2}\right)^5$ ， $b=\left(\frac{1}{2}\right)^7$ ， $c=\left(\frac{1}{2}\right)^9$

例題 5

以科學記號表示 7200×600 的值。

例題 6

已知 30^6 的科學記號為 $a\times 10^b$ ，且 40^5 的科學記號為 $c\times 10^d$ ，求 $a+b-c-d$ 的值。

例題 7

光在真空中一年時間內傳播的距離約 9.46×10^{15} 公尺，稱為1光年，即1光年 $=9.46\times 10^{15}$ 公尺。

若一星球與地球相距 27 光年，則此星球與地球的距離為多少公里？（答案請用科學記號表示）

例題 8

若某物質的長度為342奈米（1 奈米$=10^{-9}$公尺），則此物質的長度為多少公尺？（答案請用科學記號表示）

例題 9【高中教材】

求下列各式的值：

(1) $\left(4^{-1}\right)^{-2}$　　(2) $4^{-1}+2^{-2}$

例題 10【高中教材】

以根式表示下列各數：

(1) $3^{\frac{1}{2}}$　　(2) $2^{\frac{1}{3}}$　　(3) $2^{\frac{2}{3}}$　　(4) $2^{-\frac{3}{2}}$

4 絕對值

重點整理

一、絕對值的幾何意義：

1. 符號 $|a|$ 表示數線上點 $A(a)$ 與原點的距離。
2. 符號 $|a-b|$ 表示數線上 $A(a)$ 、 $B(b)$ 兩點的距離。

二、絕對值的等價意義：

1. 當 $a>0$ 時，$|a|=a$ 。例：$|7|=7$ 。
2. 當 $a=0$ 時，$|0|=0$ 。
3. 當 $a<0$ 時，$|a|=-a$ 。例：$|-5|=5$ 。

三、絕對值的性質：

1. $|a|=|-a|$ 。例：$|3|=|-3|=3$ 。
2. $|a|\ge 0$ 。

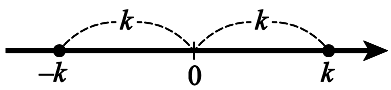
四、絕對值的代數意義：

1. $|x|=\begin{cases} x, & 當x\ge 0 \\ -x, & 當x<0 \end{cases}$ 。
2. $|x-a|=\begin{cases} x-a, & 當x\ge a \\ a-x, & 當x<a \end{cases}$ 。【高中教材】

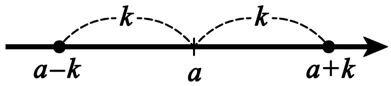
五、絕對值方程式：

設 k 為正數。

1. 若 $|x|=k$ ，則 $x=\pm k$ 。



2. 若 $|x-a|=k$ ，則 $x-a=\pm k$ ，即 $x=a\pm k$ 。【高中教材】



例題 1

求$\left|-\frac{1}{2}\right|$與$|9|$的值。

例題 2

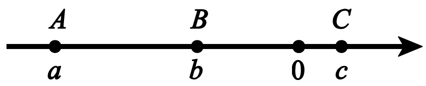
比較下列各數的大小：$a=|2-5|$，$b=-7$，$c=|-6|$。

例題 3

求$|2-8|+|-6-4|-|-5|$的值。

例題 4

如右圖，比較$|a|$、$|b|$、$|c|$的大小。



例題 5

已知數線上 A 點到原點的距離為 15，求 A 點的坐標。

例題 6

解下列各方程式：

(1)$|x| = 23$　　　(2)$|x| + 5 = 7$

例題 7

設$|a| = 5$，$|-b| = 2$，求$|-a| + |b|$的值。

例題 8

哪些整數的絕對值小於 3？

✪ 例題 9 【高中教材】

解方程式 $|x-1|=3$。

✪ 例題 10【高中教材】

解方程式 $|x|=2x+6$。

5 直線方程式

重點整理

一、二元一次方程式：

含有二個未知數（二元），且未知數的最高次方是一次，稱為「二元一次方程式」。

例：$2x-3y+4=0$。

二、二元一次聯立方程式：

由兩個二元一次方程式組成的一組方程式，亦稱為「二元一次方程組」。

例：$\begin{cases}3x+y=5\\2x-3y=4\end{cases}$。

三、解二元一次聯立方程式：

代入消去法或加減消去法。

四、二元一次方程式的圖形：

在坐標平面上，$ax+by=c$ 的圖形為一直線（其中 a，b 不全為 0），$x=k$ 的圖形為鉛直線，$y=k$ 的圖形為水平線。

五、直線的斜率：【高中教材】

設 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 為直線 L 上的相異兩點。

1. 若 L 非鉛直線，則直線 L 的斜率為 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。
2. 若 L 為鉛直線，則不規定直線 L 的斜率。

六、直線的點斜式：【高中教材】

過點 (x_0,y_0) 且斜率是 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

例題 1

依題意列出下列各敘述的二元一次方程式：

(1) 有一對兄弟，哥哥 x 歲、弟弟 y 歲，已知哥哥比弟弟大 3 歲。

(2) 有一個長方形，長 x 公分、寬 y 公分，周長 10 公分。

例題 2

利用代入消去法解聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=-3 \\ -x=2y \end{cases}$ 。

例題 3

利用加減消去法解聯立方程式 $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ -7x+4y=4 \end{cases}$ 。

例題 4

寺廟內的80位大和尚與小和尚分150顆饅頭。已知每位大和尚分到2顆饅頭，每2位小和尚分到3顆饅頭，求大和尚與小和尚各有多少人？

例題 5

坐標平面上有兩直線$x+y=5$、$x-y=3$，求兩直線的交點。

例題 6

已知點$(3,k)$在直線$2x-y=7$上，求k的值。

例題 7

求通過$(2,5)$與$(3,-1)$兩點的直線方程式。

例題 8

求過點$(1,2)$且平行 x 軸的直線方程式。

例題 9【高中教材】

坐標平面上有三點 $A(-4,3)$，$B(-4,5)$，$C(-6,5)$，分別求直線 AB、直線 BC 與直線 AC 的斜率。

例題 10【高中教材】

求下列各直線的方程式：

(1)通過點$(8,7)$且斜率為 5。

(2)通過$(2,1)$與$(1,4)$兩點。