

# 108 學年度高級中學數學學科能力競賽

## 中投區複賽試題（一）

編號：\_\_\_\_\_

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、若兩圓  $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$  與  $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$  相交於  $A, B$  兩點。假如圓  $C_3$  通過  $A, B$  兩點且與直線  $L: y - x + 2 = 0$  相切於  $P$  點。試求  $\Delta PAB$  之面積。

二、將 100 個數值  $1921, 1922, 1923, \dots, 2019, 2020$  任意排列後的數列，  
(10 分) 令為  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}\}$ ，  
並令  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$   
若數列  $\{S_i | 1 \leq i \leq 100\}$  中每一項都不被 3 整除，  
請問滿足如此排列的數列  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}\}$  有幾種？

三、設  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right)$ ，其中  $n = 1, 2, \dots$ ，  
(10 分)

證明：(1) 對所有  $n \geq 2, a_n > \sqrt[3]{2}$ 。

(2) 對所有  $n \geq 1, |a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\alpha} |a_n - \alpha|^2$ ，其中  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ 。

四、找出所有整數數對  $(x, y)$  滿足  $2^x + 2^{2x+1} = y^2 - 1$ 。  
(10 分)

五、設  $\Delta ABC$  的外接圓為  $O$ ， $\angle A$  的分角線與  $\overline{BC}$  交於點  $D$ ，而與圓  $O$  則交於點  $A$  與點  $E$ 。以  $\overline{DE}$  為直徑的圓  $\omega$  與圓  $O$  交於點  $E$  與點  $J$ 。設  $M$  為  $\overline{BC}$  的中點，證明  $\angle BAJ = \angle CAM$ 。  
(10 分)

# 108 學年度高級中學數學學科能力競賽

## 中投區複賽試題 (二)

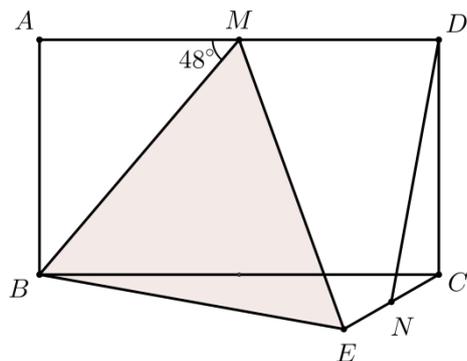
編號：\_\_\_\_\_

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題**填充題**，每題 3.5 分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

- 一、如右圖，點  $M$  是長方形  $ABCD$  的邊  $AD$  的中點， $\triangle BME$  是正三角形， $N$  為線段  $\overline{EC}$  的中點。已知  $\angle AMB = 48^\circ$ ， $BM = 1$ ，則  $\overline{DN}$  的長度是多少？



- 二、實數  $x > 1$  滿足方程式

$$\tan \left[ \cos(10^x \pi) \right] \pi = 0.$$

則  $x$  的最小值為何？

- 三、令  $x_1, x_2, \dots, x_{18}$  為方程式  $x^{18} + 4x^{11} + 1 = 0$  的 18 個根，

求  $(x_1^4 + x_1^2 + 1)(x_2^4 + x_2^2 + 1) \cdots (x_{18}^4 + x_{18}^2 + 1)$  的值為何？

- 四、設  $a_1, a_2, a_3, \dots$  為正整數嚴格遞增數列即  $a_n < a_{n+1}$ ，且滿足  $a_{a_n} = 3n$ ，求  $a_7$  的值為何？

- 五、一蒙眼槍手有  $N$  發子彈，隨機射向  $n$  個靶位，假設這  $n$  個靶位皆有一位記分員，若第  $i$  個靶位無任何子彈射中則記  $X_i = 1$  否則  $X_i = 0$ ，其中  $1 \leq i \leq n$ 。

若  $S_k$  代表等候剛好  $k$  個靶位被射中所花費的最少子彈數，

假設  $Y_k = S_k - S_{k-1}$ ，則為介於剛射中  $k-1$  個靶位與剛射中  $k$  個靶位的期間所耗費的子彈數， $k \geq 2$ 。若  $i \geq 1$ ，求  $Y_k = i$  的機率為何？

- 六、有 18 位同學進行以下遊戲：黑板上寫有正整數 1 到 38。第一位同學擦掉 3 個數，並在黑板上寫上這三個數的和減 2 的那個正整數。第二位同學從剩餘的數中擦掉 3 個數，並在黑板上寫上這三個數的和減 4。第  $k$  位同學從剩餘的數中擦掉 3 個數，並在黑板上寫上這三個數的和減  $2k$ 。如此進行一直到所有同學都參與。如果留在黑板上數皆為正整數，且 20 是留下的一個數，試求其它留下的數為何？