

108 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）

編號：_____

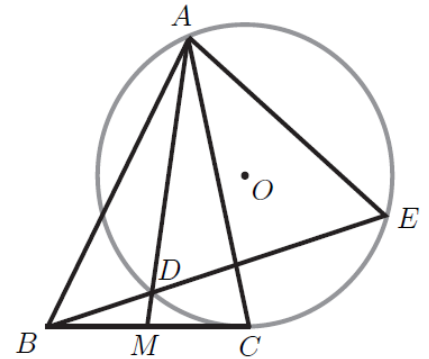
（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

- 一、設 p, q 為正整數，使得 x 的三次方程式 $x^3 - 2019x^2 + px - q = 0$ 有相異三整數根，且此三根恰成等比，求 p 所有可能的值。

- 二、給定一個銳角三角形 $\triangle ABC$, M 是 $\overline{BC}$ 的中點，
(12 分) 圓 O 通過 A 並且與 $\overline{BC}$ 於 C 處相切，直線 $\overline{AM}$ 交圓 O 於 D , 連接 $\overline{BD}$ 並延長此直線交圓 O 於另一點 E 。證明： $\angle EAC = \angle BAC$ 。



- 三、(a) 設有 8 台電腦，每台電腦恰與其他 2 台電腦連線，有多少種連結的組合？
(12 分)
- (b) 在 (a) 的前提下，假設小明的電腦是八台其中之一台。已知八台電腦中恰有一台為駭客所有，任何電腦，若是與他的電腦直接或間接連線，就會被駭，相反的，就不會被駭。若假設每一種連結的組合有相同的機率，求小明的電腦被駭的機率。

- 四、設 $f(x)$ 為實係數多項式，對任意滿足 $ab + bc + ca = 0$ 的實數 a, b, c 皆使得
(13 分) $f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c)$ 成立，求所有可能的 $f(x)$ 。

108 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）

編號：_____

（時間一小時）

注意事項：

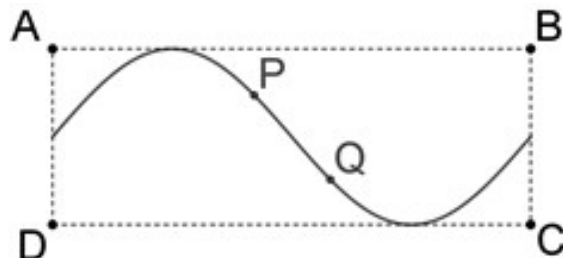
1. 本試卷共六題**填充題**，每題 3.5 分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

- 一、如右圖，在一個 4×4 共 16 個格子中，每一個填入一個數字，且每一行，每一列及每一格 2×2 的黑色粗框中都要各有 1、2、3、4 四個數字。請問若左上角的粗框已經填入了 1、2、3、4 等四個數字，那麼剩下的 12 個格子中有多少個填法可以滿足「每一行，每一列及每一格 2×2 的黑色粗框中都要有 1、2、3、4 四個數字」呢？

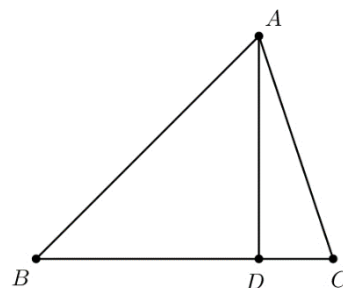
1	2		
3	4		

- 二、將 $1, 2, \dots, 2019$ 重排成 $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ ，請問 $\sum_{k=1}^{2019} |a_k - k|$ 的所有可能值中最大者為何？

- 三、在一張長 2π ，寬 2 的長方形紙張 $ABCD$ 上，印有一個正弦函數 $y = \sin x$ 一個週期的圖形曲線(如右圖)。設 P, Q 兩點為曲線上之動點，滿足 Q 的 x 坐標等於 P 的 x 坐標加 1。現將此張圖捲起來，使得 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 重合，而得一圓柱，求此時 P, Q 兩點在空間中距離的最大值。



- 四、如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{CD} = 1$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？



- 五、求 $\sum_{0 \leq i < j \leq 60} C_i^{60} \cdot C_j^{60}$ 被 31 除的餘數。

- 六、對於數列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，若 $a_{i-1} < a_i$ 且 $a_{i+1} < a_i$ ，則稱 a_i 為一個「峰」。今將 $1, 2, \dots, 6$ 重排成一個數列，恰好只有一個「峰」，求這樣的數列的個數。