

108 學年度北二區（新竹高中）
高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

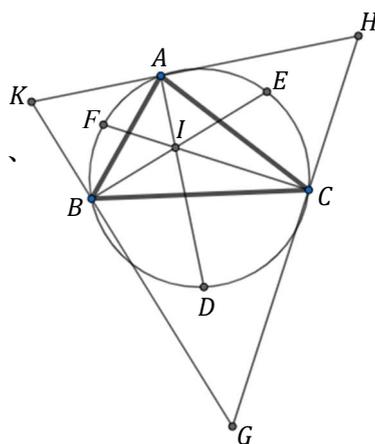
注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：如圖，銳角 $\triangle ABC$ 中，令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，

$\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的內角平分線分別交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 D 、 E 、 F 點，且 $\triangle GHK$ 的三邊 \overline{KH} 、 \overline{KG} 、 \overline{GH} 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的外角平分線。

1. 證明 D 點到 B 、 C 、 G 、 I 四點的距離相等；
2. 證明 $\triangle GHK$ 的面積等於六角形 $AFBDCE$ 面積的 2 倍。



(16 分)

問題二：試求出最小的正整數 n ，使得可以找到一個整數數列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 滿足： $a_0 = 1, |a_k - a_{k-1}| = k^2 (k \geq 1)$ 且 $a_n = 2019$ 。

(16 分)

問題三：

1. 證明對於每個正整數 $n \geq 2$ 與兩實數 x, y 滿足 $x \geq y > 0$ ，皆有

$$x^n + y^n \leq \left(x + \frac{y}{2}\right)^n。$$

2. 設 a, b, c 是三角形的三邊長，且 $a + b + c = 1$ 。利用 1. 的結論證明對於 $n \geq 2$ 皆有

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}。 \quad (17 \text{ 分})$$

108 學年度北二區（新竹高中）
高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
 2. 考試時間：1 小時。
 3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
 4. 將答案依序填寫在答案欄內。
-
1. 若 A, B, C, D 為球面 S 上四點，其中直線 DA, DB, DC 兩兩互相垂直，且 $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = a$ ，則此球面 S 的直徑為 （一）。
 2. 已知三角形三邊長皆為正整數、成等差數列、恰有兩個是質數，且周長為 99，這樣的三角形有 （二） 個。
 3. 設 P 為長方形 $ABCD$ 邊上一點，由 P 點分別向對角線作垂線 $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{PF} \perp \overline{BD}$ ，且 E, F 分別在 \overline{AC} 和 \overline{BD} 上。若長方形 $ABCD$ 的長寬分別為 4 與 3，則 $\overline{PE} + \overline{PF}$ 的長度為 （三）。
 4. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 6\overline{AB}^2$ ，則 $\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}\right) \tan C =$ （四）。
 5. 給定拋物線 $y^2 = 4x$ 及 $A(2,0), B(-2,0)$ 兩點。過 B 點且斜率為 m 的直線交拋物線於 P, Q 兩點。則直線 AP 與 AQ 的斜率之和為 （五）
(請以 m 表示)。
 6. 方程式 $x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 共有 5 個複數根，這些根的五次方總和為 （六）。
 7. 已知 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ ， $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ 。設 $z_1 = \frac{\cos x}{\sin y} + \frac{\cos y}{\sin x} i$ ，且 $|z_1| = 2$ 。若 $z_2 = \sqrt{x} + \sqrt{y}i$ ，則 $|z_1 - z_2|$ 的最大值為 （七）。

108 學年度北二區（新竹高中）
高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

【試題一】

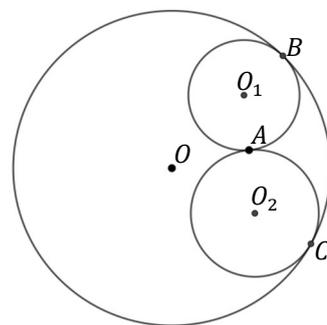
1. 將 $\{1,2,3, \dots, 9\}$ 分成兩組，使得一組的數字和等於另一組的數字積。
2. 求出所有奇數 n ，使得可以將 $\{1,2,3, \dots, n\}$ 分成兩組，讓一組的數字和等於另一組的數字積。

【證明】

【試題二】

如圖，平面上有半徑分別為 R 、 r_1 、 r_2 的圓 O 、圓 O_1 和圓 O_2 ，其中圓 O_1 和圓 O_2 外切於 A 點，且此兩圓分別與圓 O 內切於 B 、 C 兩點。

證明線段 BC 的長度為 $2R \cdot \sqrt{\frac{r_1 r_2}{(R-r_1)(R-r_2)}}$ 。



【證明】

108 學年度北二區（新竹高中）
高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一答案卷）

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序寫在答案卷內。

評 分 欄

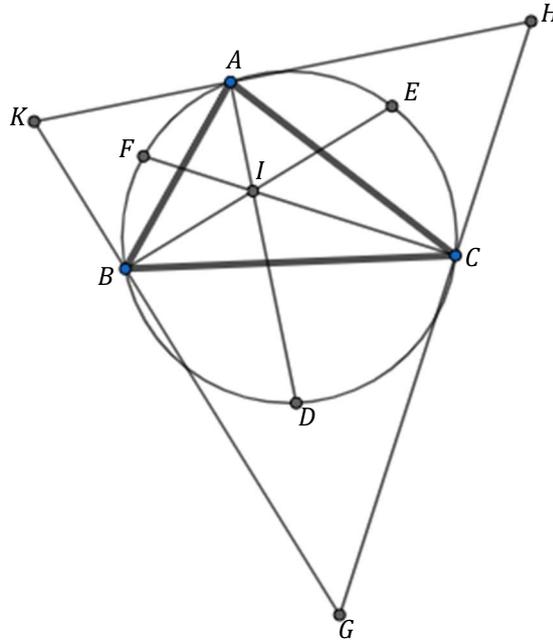
題 號	問 題 一	問 題 二	問 題 三
評 分			

總分：_____

問題一：如圖，銳角 $\triangle ABC$ 中，令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的內角平分線分別交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 D 、 E 、 F 點。且 $\triangle GHK$ 的三邊 \overline{KH} 、 \overline{KG} 、 \overline{GH} 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的外角平分線。

1. 證明 D 點到 B 、 C 、 G 、 I 四點的距離相等；
2. 證明 $\triangle GHK$ 的面積等於六角形 $AFBDCE$ 面積的 2 倍。

(16 分)



【證明】：

問題二：試求出最小的正整數 n ，使得可以找到一個整數數列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
滿足： $a_0 = 1, |a_k - a_{k-1}| = k^2 (k \geq 1)$ 且 $a_n = 2019$ 。

(16分)

【證明】：

問題三：

1. 證明對於每個正整數 $n \geq 2$ 與兩實數 x, y 滿足 $x \geq y > 0$ ，皆有

$$x^n + y^n \leq \left(x + \frac{y}{2}\right)^n。$$

2. 設 a, b, c 是三角形的三邊長，且 $a + b + c = 1$ 。利用 1. 的結論證明對於 $n \geq 2$ 皆有

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}。 \quad (17 \text{ 分})$$

【證明】：

108 學年度北二區（新竹高中）
高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試二答案欄）

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答 案 欄

(一)	(二)	(三)	(四)
(五)	(六)	(七)	

總分：_____